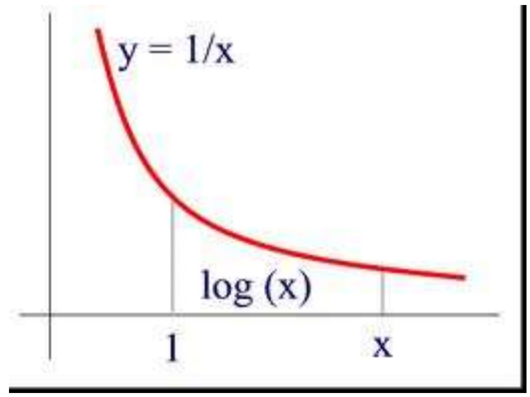
1.4. Importancia de los logaritmos
1.5. Los problemas de negocios



Desde su descubrimiento, es imposible a día de hoy concebir muchos descubrimientos sin la portación que han hecho los logaritmos. John Napier, en 1614, fue el primero en proponer este método de cálculo en su libro Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, aunque el primero en concebir el logaritmo, como concepto, fue un matemático y relojero suizo Joost Bürgi.

La importancia de los logaritmos está en que gracias a ellos, se facilita la resolución de cálculos muy complejos, lo que ha contribuido enormemente al avance de la ciencia. Si bien es cierto que son elementos de estudios fundamentales en la matemática, lo importante de los logaritmos está en las posibilidades de aplicación que tienen en la vida real.

Sin los logaritmos y su contribución, sería imposible conseguir muchísimos de los avances que hasta ahora han sido posibles. Entre los muchos avances a los que ha contribuido está el de la astronomía. También tiene múltiples aplicaciones en la geodesia, en la navegación marítima y la matemática aplicada. En la economía, los cálculos realizados con los logaritmos ayudan a conocimiento de la oferta y la demanda. En la banca, por ejemplo, ayuda al calcular el crecimiento de los depósitos. También se puede aplicar a la estadística, en la que sus cálculos ayudan a conocer el crecimiento de población. Otra de las aplicaciones que tienen los logaritmos está en la música, cuyos pentagramas tienen relación con la escala logarítmica. La topografía es otro de los usos que tiene, ayudando a conocer la altitud de un edificio. En la biología ayuda en la realización del cálculo del pH. Y muchas más aplicaciones.

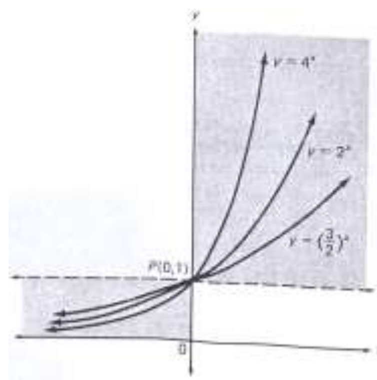
Por tanto, no sólo estamos ante una simple operación matemática, si no en una operación matemática que contribuye realmente al desarrollo económico, industrial, tecnológico, social, etc.

La importancia de los logaritmos está en que, en el siglo XVII, es posible que no tuvieran conciencia de la importancia que esta operación matemática tendría para el desarrollo en mucho de los ámbitos de un país y de la infinidad de aplicaciones que tendría. Su importancia está en la simplificación que supone para multitud de cálculos. Y ahora más simplificado con ayuda de ordenadores y calculadoras.

El mundo avanza a pasos agigantados y la tecnología va un paso por delante del ser humano. Gracias a los logaritmos estos avances son más fáciles de comprender y nos ayudan a entender todo lo que nos rodea, aunque muchos de nosotros sigamos viéndolo como algo complicado.

La base *e*

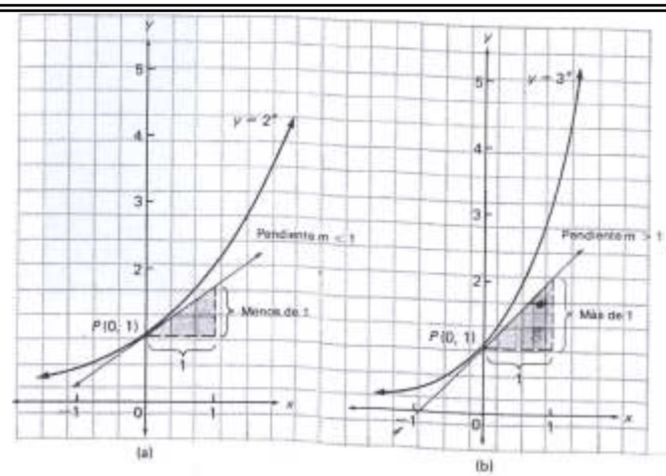
Todas las gráficas de $y = b^x$, para $b > 1$ tienen la misma forma básica, como se pone de manifiesto en la figura siguiente. Observe usted que, cuanto mayor es el valor de b, tanto más aprisa asciende la curva hacia la derecha y más rápidamente se aproxima el eje de las x hacia la izquierda. Usted puede usar la imaginación para ver que, cuando se tomen en consideración todos los valores posibles de la base $b > 1$, las curvas correspondientes llenarán completamente la regiones sombreadas, como se ilustra en la siguiente página.



> *Advierta usted que, en nuestra explicación, el concepto de la recta tangente a una curva que no es un círculo se presenta intuitivamente. La definición precisa se ofrece en el estudio del cálculo.*

Todas estas curvas pasan por el punto $P(0, 1)$. Las rectas tangentes a las curvas en el punto mencionado resultan virtualmente horizontales (con una pequeña pendiente positiva) para los valores de b cercanos a 1, en tanto que son casi verticales para los valores grandes de b. Las pendientes de dichas tangentes consisten en todos los números $m > 0$.

> *Estas figuras muestran las curvas correspondientes a $y = 2^x$ e $y = 3^x$, incluyendo en cada caso la tangente que pasa por el punto P(O, 1).*



Por las marcas señaladas en la Cuadrícula, usted puede observar que la pendiente de la tangente a $y = 2^x$ es menor que 1 ; pues, para cada aumento de 1 unidad en sentido horizontal, la variación en el sentido vertical resulta menor que 1 unidad. De manera semejante, puede usted apreciar que la pendiente de la tangente a $y = 3^x$ es ligeramente mayor que 1. Sospechamos que debe haber un valor b que permita que la pendiente de la tangente a la correspondiente función exponencial y que pase por P resulte exactamente igual a 1. En efecto, en cursos avanzados es posible demostrar que existe dicho valor de b. El número indicado desempeña un papel muy importante en las matemáticas y se designa por medio de la letra e.

***e* es el número real que permite que la tangente a la curva definida por $y = e^x$, en el punto *P*(0, 1), tenga la pendiente igual a 1.**

Además. el número e está íntimamente relacionado con la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *. Conforme se toma un valor cada vez más grande de n, la expresión* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *se va aproximando al número e. Por ejemplo:*

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2.59374$$

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2.70481$$

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.71692$$

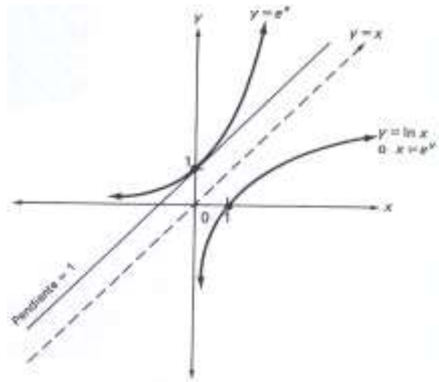
(Véase el Ejercicio 57).

Como la curva correspondiente a $y = e^x$ queda entre las definidas por $y = 2^x$ e $y = 3^x$, esperamos que e satisfaga esta condición: $2 < e < 3$. En efecto, esto es correcto; de hecho, resulta que e es un número irracional que está más cerca de 3 que de 2. Aproximado hasta cienmilésimos, se obtiene: $e = 2.71828$.

Es importante tener presente que e es un número real, así como π es un número real que encontramos con frecuencia en las matemáticas. Los valores específicos para las potencias de e se pueden encontrar en la tabla II del apéndice. Por ejemplo, con dicha tabla obtenemos los siguientes valores, redondeados a décimos, centésimos o milésimos.

Estos datos se encuentran en la columna encabezada por e^x para los valores de x	$e^2 = 7.39$ $e^3 = 20.1$ $e^4 = 54.6$	$e^{-2} = 0.135$ $e^{-3} = 0.050$ $e^{-4} = 0.018$	Estos datos se encuentran en la columna encabezada por e^{-x} para los valores de x.

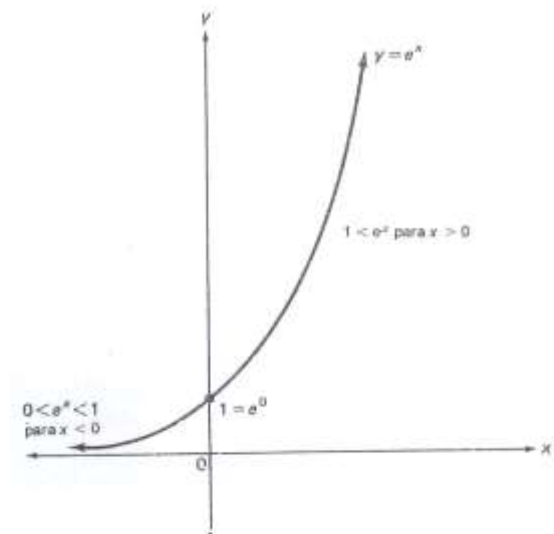
Para propósitos teóricos, e es el número más importante como base de funciones exponenciales y logarítmicas. La inversa de $y = e^x$ está dada por $y = \log_e x$. En lugar de $\log_e x$, escribimos **ln *x***, expresión que recibe el nombre de **logaritmo natural de *x***. Por lo tanto. $x = e^y$ e $y = \ln x$ son equivalentes.



Como $e > 1$, las propiedades de $y = b^x$ y de $y = log_b x$ ($b > 1$) siguen cumpliéndose con $y = e^x$ y con $y = In\ x$. A continuación, reunimos estas propiedades para una fácil referencia.

PROPIEDADES DE $y = e^x$

1. Dominio: todos los números reales.
2. Rango: toda $y > 0$
3. Es una función creciente.
4. La curva es cóncava hacia arriba.
5. Es una función biunívoca: si $e^{x1} = e^{x2}$, entonces: $x_1 = x_2$.
6. $0 < e^x < 1$, para $x < 0$; $e^0 = 1$; $e^x > 1$, para $x > 0$
7. $e^{x1}e^{x2} = e^{x1+x2}$
   $\frac{e^{x1}}{e^{x2}} = e^{x1-x2}$
   $(e^{x1})^{x2} = e^{x1x2}$
8. $e^{\ln x} = x$
9. Ecuación de la asíntota horizontal: $y = 0$



En cada lista, la propiedad 8 es consecuencia directa de que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ sean inversas. Por consiguiente,

$$x = f(g(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x}$$

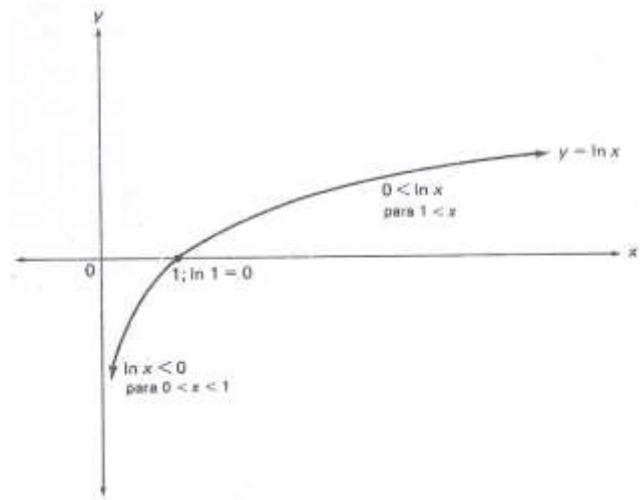
y también

$$x = g(f(x)) = g(e^x) = \ln e^x$$

Además, consulte usted el caso general, en la página 367.

PROPIEDADES DE $y = \ln x$

1. Dominio: cada *x > 0.*
2. Rango: todos los número reales.
3. Es la función creciente.
4. La curva es cóncava hacia abajo.
5. Es una función biunívoca; si $\ln x_1 = \ln x_2$, entonces: $x_1 = x_2$.
6. $\ln x < 0$, para $0 < x < 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x > 0$, para $x > 1$.
7. $\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2$
   $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$
   $\ln x_1^{x_2} = x_2 \ln x_1$
8. $\ln e^x = x$.
9. Ecuación de asíntota vertical; *x* = 0.



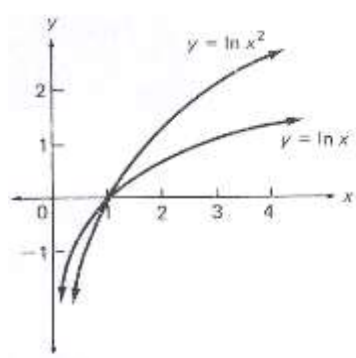
En los ejemplos siguientes, se utiliza la base *e* para resolver cada caso de manera semejante a la que puso antes en práctica, con otras bases.

EJEMPLO 1 **(a)** Encuentre el dominio de $y = \ln(x-2)$. **(b)** Elabore la gráfica de $y = \ln x^2$, para *x* > 0.

Solución

(a) Como el dominio de $y = \ln x$ consta de cada *x* > 0, el dominio de $y = \ln(x-2)$ consistirá en cada *x* para la cual se tenga *x* – 2 > 0; o sea, cada *x* > 2.

(b) Dado que $y = \ln x^2 = 2\ln x$, obtenemos la gráfica multiplicando por 2 las ordenadas de $y = \ln x$.



EJEMPLO 2 Sea $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+4}$. Aplique las leyes de los logaritmos para escribir $\ln f(x)$ como una expresión que incluya sumas, diferencias y múltiplos de los logaritmos naturales.

Solución Como $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+4}$, podemos proceder de la siguiente manera:

$$\ln f(x) = \ln \frac{3x^2}{x^2+4}$$

$= \ln 3x^2 - \ln(x^2+4)$ (Por la ley 2 de los logaritmos)
$= \ln 3 + \ln x^2 - \ln(x^2+4)$ (Por la ley 1 de los logaritmos)
$= \ln 3 + 2\ln x - \ln(x^2+4)$ (Por la ley 3 de los logaritmos)

Siempre que M = N, por la definición de función, se deduce que ln *M* = ln *N. Es decir, para valores iguales en los dominios de M y N, sólo puede haber un valor en el rango.*

EJEMPLO 3 Resuelva para $t: e^{\ln(2t-1)} = 5$

Solución

$$e^{\ln(2t-1)} = 5$$
$$2t-1 = 5 \qquad \text{(Propiedad 8, para } y = e^x; e^{\ln x} = x\text{)}$$
$$2t = 5$$
$$t = 3$$

EJEMPLO 4 Resuelva para *t:* $e^{2t-1} = 5$.

Solución *Escribimos la expresión exponencial en forma logarítmica.*

$$e^{2t-1} = 5$$
$$2t-1 = \ln 5 \qquad (\log_e 5 = \ln 5 = 2t-1)$$
$$2t = 1 + \ln 5$$
$$t = \frac{1}{2}(1+\ln 5)$$

Verificación: $e^{2[1/2(1+\ln 5)]-1} = e^{1+\ln 5-1} = e^{\ln 5} = 5$

Con aproximación hasta milésimos: $t = \frac{1}{2}(1+\ln 5) = 1.305$

EJEMPLO 5 Resuelva para *x*: $\ln(x+1) = 1 + \ln x$.

Solución

$$\ln(x+1) - \ln x = 1$$
$$\ln\frac{(x+1)}{x} = 1$$

Ahora, convertimos la expresión a la forma exponencial:

$$\frac{(x+1)}{x} = e$$
$$ex = x+1$$
$$(e-1)x = 1$$
$$x = \frac{1}{e-1}$$

Verificación:

$$\ln\left(\frac{1}{e-1}+1\right)=\ln\frac{e}{e-1}=\ln e-\ln(e-1)$$

$$=1+\ln(e-1)^{-1}=1+\ln\frac{1}{e-1}$$

Recuerde: Si $\log_b x = y$, entonces: $b^y = x$.

$$\ln\frac{x+1}{x}=\log_e\frac{x+1}{x}=1$$

Por lo tanto, $e^1=\frac{x+1}{x}$

EJEMPLO 6 (a) Presente $h(x)=\ln(x^2-5)$ como la composición de dos funciones. **(b)** Exprese $F(x)=e^{\sqrt{x^2-3x}}$ como la composición de tres funciones.

Solución

(a) Sean: $f(x)=\ln x$ y $g(x)=x^2+5$. Entonces:

$$(f\ o\ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+5)=\ln(x^2+5)=h(x)$$

(b) Sean: $f(x)=e^x, g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=x^2-3x$. Entonces:

$(f\ o\ g\ h)(x)=f(g(h(x)))$ — *h* es la función "interna"

$=f(g(x^2-3x))$ — *g* es la función "central"

$=f(\sqrt{x^2-3x})$ — *f* es la función "externa".

(son posibles otras soluciones)

EJEMPLO 7 Determine los signos de $f(x)=x^2e^x+2xe^x$.

Solución Encontramos que $f(x)=x^2e^x+2xe^x=xe^x(x+2)$, donde $e^x > 0$ para cualquier x, en tanto que los demás factores se igualan a cero, cuando $x = 0$ o cuando $x = -2$.

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
Signo de $x+2$	-	+	+
Signo de x	-	-	+
Signo de *f(x)*	+	-	+

$f(x)>0$, en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(0,\infty)$.

$f(x)<0$, en el intervalo (-2,0)

Use valores específicos para verificaren cada intervalo, con el fin de determinar el signo de f(x) para dicho intervalo. Por ejemplo, sea x = -1 en el intervalo (-2,0).

1. Crecimiento y decrecimiento exponencial

Existe una gran variedad de problemas de aplicación relacionados con las funciones exponenciales y logarítmicas. Antes de tomar en consideración estas aplicaciones, será útil aprender a resolver una ecuación exponencial. como $2^x = 35$.

$$2^x = 35$$
$$\ln 2^x = \ln 35 \qquad (Si\ A = B, entonces : \ln A = \ln B)$$
$$x \ln 2 = \ln 35 \qquad (¿Por\ qué?)$$
$$x = \frac{\ln 35}{\ln 2}$$

Se puede obtener una aproximación al valor de x usando la tabla III del apéndice. Los números de esta tabla suministran los valores de ln x aproximados hasta milésimos. (En la mayor parte de los casos, ln x es irracional.) En esa misma tabla, tenemos: ln 2 = 0.693. Aunque ln 35 no se suministra (directamente) en la tabla, podemos encontrarlo aplicando la segunda ley de los logaritmos.

$$\ln 35 = \ln(3.5)(10) = \ln 3.5 + \ln 10$$
$$= 1.253 + 2.303 \qquad (Tabla\ III)$$
$$= 3.556$$

Ahora, tenemos:

$$x = \frac{\ln 35}{\ln 2} = \frac{3.556}{0.693} = 5.13$$

Como tosca verificación, observamos que **5.13** es un valor razonable, ya que $2^5 = 32$.

Observe que los valores encontrados en la tablas de logaritmos son sólo aproximaciones. Para evitar complicaciones. Empero, usaremos el signo igual (=)

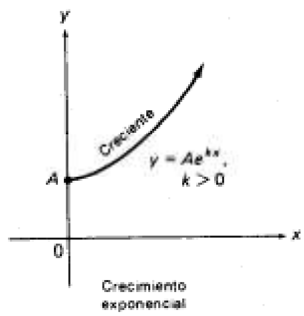
VERIFIQUE SU COMPRENSION

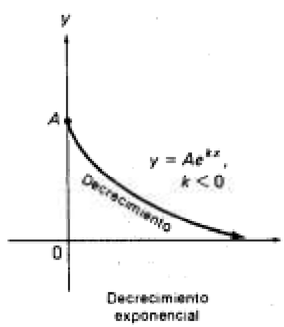
Resuelva para x cada ecuación expresada con logaritmos naturales. Señale la solución aproximada usando la tabla III.		
1. $4^x = 5$	**2.** $4^{-x} = 5$	**3.** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 12$
4. $2^{3x} = 10$	**5.** $4^x = 15$	**6.** $67^x = 4$

Al principio de la Sección 1, desarrollamos la fórmula $y = (10{,}000)2^x$, que nos da el número de bacterias presentes en un cultivo, después de x horas de proliferación; 10,000 es el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tardará este cultivo de bacterias en llegar a 100,000? Para contestar este pregunta, hagamos $y = 100{,}000$ y resolvamos la ecuación para x.

$$(10{,}000)2^x = 100{,}000$$
$$2^x = 10 \qquad (Dividimos\ entre\ 10{,}000)$$
$$x \ln 2 = \ln 10$$
$$x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$$
$$= \frac{2.303}{0.693} = 3.32$$

Tardará aproximadamente 3.3 horas.





En el ejemplo anterior, se usaron funciones exponenciales y logarítmicas para resolver un problema de *crecimiento exponencial*. Muchos problemas que implican el **crecimiento exponencial** o el **decrecimiento exponencial** se pueden resolver usando la fórmula general:

$$y = f(x) = Ae^{kx}$$

que muestra en qué forma depende del tiempo *x* la cantidad de una sustancia determinada *y*. Como $f(0) = A$, la propia *A* representa la cantidad inicial de la sustancia, en tanto que *k* es una constante. En una situación dada, $k > 0$ significa que *y* es un valor creciente (aumenta) con el tiempo. Para $k < 0$, la sustancia decrece (disminuye). (Compare usted las gráficas de $y = e^x$ y de $y = e^{-x}$).

También el citado problema de las bacterias se ajusta a esta fórmula general, como se puede observar al sustituir $2 = e^{\ln 2}$ en la ecuación $y = (10{,}000)2^x$:

$$y = (10{,}000)2^x = (10{,}000)\left(e^{\ln 2}\right)^x = 10{,}000e^{(\ln 2)x}$$

EJEMPLO 1 Una sustancia radiactiva se desintegra (y se convierte en otro elemento químico) de acuerdo con la fórmula: $y = Ae^{-0.2x}$, donde *y* es la cantidad remanente después de *x* años.

(a) Si tenemos la cantidad inicial *A* = 80 gramos. ¿qué cantidad quedará después de 3 años?
(b) **La vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda en descomponerse la mitad de la misma. Encuentre la vida media de esta sustancia. en la que *A* = 80 gramos.

Solución

(a) Como *A* = 80. tenemos: $y = 80e^{-0.2x}$. Necesitamos resolver esta ecuación para la cantidad *y*, cuando $x = 3$.

$$
\begin{aligned}
y &= 80e^{-0.2x} \\
&= 80e^{-0.2(3)} \\
&= 80e^{-0.6} \\
&= 80(0.549) \qquad (Tabla\ II) \\
&= 43.920
\end{aligned}
$$

Habrá alrededor de 43.9 gramos después de 3 años.

(b) Esta pregunta se refiere al tiempo *x* en el que sólo queda la mitad de la cantidad inicial. En consecuencia, la vida media *x* constituye la solución de $40 = 80e^{-0.2x}$. Dividimos ambos lados entre 80:

$$\frac{1}{2} = e^{-0.2x}$$

Tomamos el logaritmo natural de ambos lados, o convertimos la expresión en la forma logarítmica, para obtener: $-0.2x = \ln\frac{1}{2}$. Como $\ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, resolvemos la ecuación para *x* de la manera siguiente:

$$
\begin{aligned}
-0.2x &= -\ln 2 \\
x &= \frac{\ln 2}{0.2} \\
&= 3.465
\end{aligned}
$$

La vida media aproximadamente 3.465 años.

El carbono 14, representado mediante ^{14}C, es un isótopo radiactivo de dicho elemento, que tiene una vida media de alrededor de 5750 años. Encontrando qué cantidad de ^{14}C contienen los restos de lo que fue un organismo vivo, es posible determinar qué porcentaje representa de la cantidad original de ^{14}C, en el momento de la muerte. Una vez que se tiene esta información, la fórmula $y = Ae^{kx}$ nos permite calcular la antigüedad de los restos. La fecha correspondiente se obtiene al resolver la ecuación para la constante *k*. Dado que la cantidad de ^{14}C después de 5750 años será $\frac{A}{2}$, obtenemos lo siguiente:

Explique cada paso de esta solución

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{2} &= Ae^{5750k} \\
\frac{1}{2} &= e^{5750k} \\
5750k &= \ln\frac{1}{2} \\
k &= \frac{\ln 0.5}{5750}
\end{aligned}
$$

Sustituimos *k* por este valor en $y = Ae^{kx}$ para obtener la siguiente fórmula de la cantidad residual del carbono 14. después de *x* años:

$$y = Ae^{(\ln 0.5/5750)x}$$

EJEMPLO 2 Se encuentra que el esqueleto de un animal contiene la cuarta parte de la cantidad original de ^{14}C . ¿Qué antigüedad tiene el esqueleto?

Solución Sea x la antigüedad del esqueleto. Entonces:

$$\frac{1}{4}A = Ae^{(\ln 0.5/5750)}$$

$$\frac{1}{4} = e^{(\ln 0.5/5750)x}$$

$$\left(\frac{\ln 0.5}{5750}\right)x = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$

$$x = \frac{(5750)(-\ln 4)}{\ln 0.5}$$

$$= 11{,}500$$

El esqueleto tiene alrededor de 11,500 años de antigüedad.

También las fórmulas usadas en la evaluación del **interés compuesto** constituyen aplicaciones del crecimiento exponencial. Cuando una inversión gana un interés compuesto, esto significa que el interés obtenido después de un periodo fijo de tiempo se agrega a la inversión inicial y, entonces, el nuevo total, gana intereses durante el siguiente periodo de inversión; y así, sucesivamente. Supongamos. por ejemplo, que una inversión de *P* pesos gana intereses cada año con el rédito del *r* por ciento de interés compuesto anual. En estas condiciones. después del primer año, el valor total corresponde a la suma de la inversión inicial *P* más el interés *Pr* (*r* se utiliza en forma de fracción decimal). De este modo, el total después de un año es

$$P + \mathrm{Pr} = P(1 + r)$$

Después del segundo año, la cantidad total es $P(1+r)$ más el interés ganado por esta cantidad, el cual corresponde a $P(1+r)r$. Entonces, el total después de dos años es

$$P(1+r) + P(1+r)r = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2$$

De modo parecido, después de tres años, el total es

$$P(1+r)^2 + P(1+r)^2 r = P(1+r)^2(1+r) = P(1+r)^3$$

y, después de *t* años, la cantidad final *A* está dada por

$$A = P(1+r)^t$$

Los periodos para señalar el rédito por el interés compuesto son habitualmente menores de un año. Pueden ser trimestrales (4 veces al año), mensuales o diarios, o de cualquier otro intervalo. En casos así, la tasa de interés para el periodo señalado corresponde al rédito *r* anual dividido entre el número de los periodos de interés que hay en cada año. Así, si el interés compuesto es trimestral, la tasa de interés para cada periodo corresponde a *r*/4. Ahora, de acuerdo con el razonamiento usado para obtener $A = P(1+r)^t$, la cantidad final *A*, después de un año (4 periodos redituables), es:

$$A_1 = P\left(1+\frac{r}{4}\right)^4$$

Si hay *n* periodos redituables por año, el rédito por cada periodo viene a ser *r/n* y, después de un año, tenemos

$$A_1 = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

De manera semejante, después de *t* años, la cantidad final *A*, está dada por

$$A_t = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Este resultado se puede derivar del resultado anterior. Véase el Ejercicio 46.

EJEMPLO 3 Una inversión de $5000 gana intereses con el rédito anual del 8.4 %, compuesto mensualmente. Conteste usted lo siguiente:

(a) ¿Qué cantidad se tendrá después de un año?
(b) ¿Qué suma de dinero habrá después de 10 años?
(c) ¿Qué interés se habrá ganado en los 10 años?

Solución

(a) Como el rédito anual corresponde a r = 8.4% = 0.084, y el interés compuesto se determina mensualmente, la tasa del interés mensual es r/n = 0.084/12 = 0.007. Sustituimos este valor, con P = 5000 y n = 12, en $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$.

$$A = 5000(1+0.007)^{12} = 5000(1.007)^{12} = 5436.55$$

Para determinar el valor de (1,007)^{12}, use una calculadora que tenga la tecla exponencial, generalmente señalada con el símbolo y^x. Primero registre 1.007, oprima la tecla y^x y, a continuación registre el 12 para obtener 1.08731. (También es posible usar una tabla con las tasas de interés compuesto.)

Al redondear la cantidad de dinero suprimiendo los centavos, la cantidad que permanece en depósito, después de un año, es $5437,

(b) Usamos la fórmula: $A_t = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ donde $P = 5000, \quad \frac{r}{n} = 0.007, \quad n = 12, \quad y \quad t = 10.$

$$A = 5000(1.007)^{12(10)} = 5000(1.007)^{120} = 11547.99$$

Después de 10 años, la cantidad asciende aproximadamente a $11,548.

(c) Después de 10 años, el interés ganado es

11548 - 5000 = 6548 pesos

Como ejemplo, tome usted r = 0.2 y use una calculadora para verificar los siguientes cómputos, redondeados hasta cienmilésimos (cinco cifras decimales), que demuestren que $\left(1+\frac{0.2}{n}\right)^{n}$ ***se aproxima a*** $e^{0.2}$ ***conforme n se vuelve cada vez más grande.***

$$\left(1+\frac{0.2}{10}\right)^{10} = 1.21899$$

$$\left(1+\frac{0.2}{100}\right)^{100} = 1.22116$$

$$\left(1+\frac{0.2}{1000}\right)^{1000} = 1.22138$$

$$Además, \quad e^{0.2} = 1.22140$$

La nota al margen, en la página 377, señala que los valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ se aproximan al número *e*, conforme *n* se hace cada vez más grande. También es cierto que $\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}$ se aproxima a e^r, conforme *n* aumenta cada vez más. Estas observaciones, cuando se hacen matemáticamente precisas. conducen a la siguiente fórmula del **interés compuesto continuo**:

$$A = Pe^{rt}$$

donde *P* es la inversión inicial, *r* es la tasa de interés anual y *t* es el número de años, En estas condiciones, $1000 invertidos al 10% de interés compuesto continuo, durante 10 años, producen una cantidad de

$$A = 1000e^{(0.10)(10)} = 1000e^{1} = 1000(2.718) = 2718$$

Tras 10 años, a pesar de aplicarse un interés compuesto continuo, la cantidad que permanezca en depósito (redondeada al entero más cercano) no aumentará a más de $2718.

EJEMPLO 4 Supongamos que se invierten $1000 al 10% de interés compuesto continuo. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que se duplique esta inversión?

Solución Deseamos que la cantidad final en depósito sea $2000. Por lo tanto, tenemos la siguiente ecuación, y necesitamos resolverla para t:

$$
\begin{aligned}
2000 &= 1000e^{(0.10)t} \\
2 &= e^{(0.1)t} \qquad (Dividimos\ entre\ 1000) \\
\ln 2 &= (0.1)t \quad (Escribimos\ en\ la\ forma\ logarítmica) \\
\frac{\ln 2}{0.1} &= t \qquad (Dividimos\ entre\ 0.1) \\
\frac{0.693}{0.1} &= t \qquad (Encontramos\ \ln 2\ en\ la\ tabla\ III) \\
6.93 &= t
\end{aligned}
$$

Se necesitarán aproximadamente 7 años para que la inversión duplique su valor. Como verificación, observe usted, en la tabla III, que $e^{(0.1)(7)} = e^{0.7} = 2.01$, que es aproximadamente igual a 2.

---

2. Notación científica

Para escribir números muy grandes o muy pequeños los científicos usan con frecuencia una forma de expresión llamada **notación científica**. Como lo observará usted, la notación científica es útil para simplificar ciertos tipos de cómputos. He aquí algunos ejemplos de la notación científica:

$623{,}000 = 6.23 \times 10^5$ $\qquad 0.00623 = 6.23 \times 10^{-3}$
$6230 = 6.23 \times 10^3$ $\qquad 0.0000623 = 6.23 \times 10^{-5}$

Es fácil verificar que son correctos. Por ejemplo

$6.23 \times 10^5 = 6.23 \times 100{,}000 = 623{,}000$

$6.23 \times 10^{-3} = 6.23 \times \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{6.23}{1000} = 0.00623$

Los ejemplos anteriores indican que *un número N se ha puesto en la notación científica, cuando está expresado como el producto de un número del 1 al 10 por una potencia del propio 10 con exponente entero*. Así, tenemos:

$$N = x\left(10^c\right) \qquad donde \quad 1 \le x < 10 \quad y \quad c \quad es \quad un \quad entero$$

ESCRITURA DE UN NUMERO EN LA NOTACION CIENTIFICA

Se coloca el punto decimal después del primer dígito diferente de cero (esto produce el número entre el 1 y el 10). Luego, se determina la potencia del 10, contando el número de cifras que se ha desplazado el punto decimal. Si el punto decimal se ha movido hacia la izquierda, la potencia es positiva; si se ha movido hacia la derecha, la potencia es negativa.

Ejemplos:

$$2{,}070{,}000. = 2.07x10^6$$

seis cifras hacia la izquierda

$$0.00000084 = 8.4x10^{-7}$$

siete cifras hacia la derecha

Para convertir de nuevo en la notación normal un número dado en la notación científica, lo único que se necesita es desplazar el punto decimal las cifras señaladas por el exponente de 10. El punto decimal se mueve hacia la derecha cuando el exponente es positivo y hacia la izquierda cuando es negativo.

EJEMPLO 1 Escriba $1.21x10^4$ en la notación normal.

Solución Movemos el punto decimal de 1.21 cuatro cifras hacia la derecha.

$$1.21x10^4 = 12{,}100$$

EJEMPLO 2 Escriba $1.21x10^{-2}$ en la notación normal.

Solución Movemos el punto decimal de 1.21 dos cifras hacia la izquierda.

$$1.21x10^{-2} = 0.0121$$

VERIFIQUE SU COMPRENSION

Convierta en notación científica.

1. 739	**2.** 73,900	**3.** 0.00739
4. 0.739	**5.** 73.9	**6.** 7.39

Convierta en notación normal.

7. $4.01x10^3$	**8.** $4.01x10^{-3}$	**9.** $1.11x10^{-2}$
10. $1.11x10^5$	**11.** $9.2x10^{-4}$	**12.** $4.27x10^0$

La notación científica puede ayudar a simplificar cómputos aritméticos. Por ejemplo, para evaluar

$$\frac{(2,750,000)(0.015)}{750}$$

primero, escribimos cada número en la notación científica:

$$\frac{(2,750,000)(0.015)}{750} = \frac{(2.75x10^{6})(1.5x10^{-2})}{7.5x10^{2}}$$

En seguida, acomodamos todo de otra manera para reunir todos los números del l al 10 y todas las potencias de 10, de la manera siguiente:

$$\frac{(2.75x10^{6})(1.5x10^{-2})}{7.5x10^{2}} = \frac{(2.75)(1.5)}{7.5} x \frac{(10^{6})(10^{-2})}{10^{2}}$$

Calculamos el valor de cada una de las fracciones:

$$\frac{(2.75)(1.5)}{7.5} = \frac{4.125}{7.5} = 0.55$$

$$\frac{(10^{6})(10^{-2})}{10^{2}} = \frac{10^{6+(-2)}}{10^{2}} = \frac{10^{4}}{10^{2}} = 10^{2}$$

Entonces, la solución es este producto:

$$0.55x10^{2} = 55$$

La labor anterior se realiza habitualmente de manera más compacta:

$$\begin{aligned} \frac{(2,750,000)(0.015)}{750} &= \frac{(2.75x10^{6})(1.5x10^{-2})}{7.5x10^{2}} \\ &= \frac{(2.75)(1.5)}{7.5} x \frac{(10^{6})(10^{-2})}{10^{2}} \\ &= 0.55x10^{2} \\ &= 55 \end{aligned}$$

En la notación científica, esta solución se escribe así: 5.5 x 10.

EJEMPLO 3 Use la notación científica para calcular: $\frac{1}{800,000}$.

Solución

$$\frac{1}{800{,}000}=\frac{1}{8x10^{5}}=\frac{1}{8}x\frac{1}{10^{5}}=0.125x10^{-5}=0.00000125$$

En la notación científica, la solución del Ejemplo 3 se escribe 1.25 x 10^{-6}

EJEMPLO 4 Use la notación científica para calcular el valor de

$$\frac{(2{,}310{,}000)^{2}}{(11{,}200{,}000)(0.000825)}$$

Solución

$$\frac{(2{,}310{,}000)^{2}}{(11{,}200{,}000)(0.000825)}=\frac{\left(2.31x10^{6}\right)^{2}}{\left(1.12x10^{7}\right)\left(8.25x10^{-4}\right)}$$

$$=\frac{(2.31)^{2}x\left(10^{6}\right)^{2}}{\left(1.12x10^{7}\right)\left(8.25x10^{-4}\right)}\qquad\left[(ab)^{n}=a^{n}b^{n}\right]$$

$$=\frac{(2.31)^{2}}{(1.12)(8.25)}x\frac{10^{12}}{\left(10^{7}\right)\left(10^{-4}\right)}\qquad\left[\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}\right]$$

$$=0.5775x10^{9}$$

$$=577{,}500{,}000$$

---

3. Logaritmos comunes y sus aplicaciones

Los logaritmos se descubrieron hace alrededor de 350 años. Desde entonces se han usado ampliamente para simplificar los cómputos numéricos complicados. Ahora, gran parte de esta labor se puede llevar a cabo de modo más eficaz con la ayuda de las computadoras y calculadoras. Sin embargo, los cómputos logarítmicos nos ayudarán a entender mejor la teoría de los logaritmos, que desempeñan un papel importante en muchas ramas de las matemáticas (incluso en el cálculo) y en sus aplicaciones.

Para el trabajo científico y técnico, a menudo los números se escriben en la notación científica y por lo tanto, se emplean los logaritmos de base 10, llamados **logaritmos comunes**.

Más adelante aparece un extracto de la tabla IV del apéndice. Contiene los logaritmos comunes de números de tres cifras de 1.00 a 9.99. Para encontrar un logaritmo, digamos $\log_{10} 3.47$, buscamos primero el valor 3.4 bajo el encabezado *x*; luego, en el renglón del 3.4 y en la columna encabezada por el dígito 7, se encuentra el número .5403: éste es el logaritmo común de 3.47. Escribimos:

$$\log_{10} 3.47=0.5403\qquad\left[\text{Re}\,\textit{cuerde que esto significa}: 3.47=10^{0.5403}\right]$$

Advierta usted que los valores encontrados en las tablas de logaritmos son aproximaciones. Por sencillez, empero, usaremos el signo igual (=)

Invirtiendo el proceso, podemos empezar con $\log_{10} x=0.5403$ para encontrar el valor de x.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Los logaritmos comunes de la tabla IV son decimales de cuatro cifras, entre 0 y 1. Salvo por el caso $\log_{10}$, 1=0, todos son valores aproximados. El hecho de que estén entre 0 y 1 se tomará en cuenta en los ejercicios.

Como siempre se considera que los logaritmos comunes corresponden a la base 10, podemos simplificar la notación y suprimir el índice 10 de las expresiones logarítmicas. Así, escribiremos log N en lugar de $\log_{10} N$. Verifique usted los siguientes valores, tomados de la tabla IV:

$$\log 3.07 = 0.4871 \qquad \log 8.88 = 0.9484$$
$$Si \log x = 0.7945, \quad entonces: x = 6.23$$

Para encontrar el log N, donde N no está entre 1 y 10, escribimos primero el número N en la notación científica: $N = x(10^c)$. Esta forma de expresar N, junto con la tabla IV, nos permitirá encontrar log N. En general,

$$\begin{aligned} \log N &= \log \left(x10^c\right) \\ &= \log x + \log 10^c \qquad (Ley\ 1\ de\ los\ \log aritmos) \\ &= \log x + c \qquad (¿Por\ qué?) \end{aligned}$$

El entero c es la **característica** del log N, y la fracción decimal con cuatro cifras, correspondiente al log x, constituye su **mantisa**. Usando N = 62,300, tenemos:

$$\begin{aligned} \log 62{,}300 = \log 6.23\left(10^4\right) &= \log 6.23 + \log 10^4 \\ &= \log 6.23 + 4 \\ &= 0.7945 + 4 \qquad (Tabla\ IV) \\ &= 4.7945 \end{aligned}$$

Observe esta diferencia:
log N: Logaritmo común base 10
ln N: Logaritmo natural base e

EJEMPLO 1 Encuentre log 0.0419.

Solución

$$\log 0.0419 = \log 4.19\left(10^{-2}\right) = \log 4.19 + \log 10^{-2} = 0.6222 + (-2)$$

Supongamos que, en el Ejemplo l. se combina la mantisa 0.6222 con la característica negativa:

$$0.6222+(-2)=-1.3778=-(1+0.3778)=-1+(-0.3778)$$

Dado que la tabla IV no tiene mantisas negativas, como -0.3778, evitamos estas combinaciones y conservamos la forma del log 0.0419 de modo que la mantisa sea positiva. Para los cómputos, hay otras formas útiles de 0.6222 + (-2) en las que se preserva la mantisa 0.6222. Observe usted que -2 = 8 – 10, 18 – 20, y así, sucesivamente. En estas condiciones.

$$0.6222+(-2)=0.6222+8-10=8.6222-10=18.6222-20$$

De manera semejante,

$$\log 0.00569=7.7551-10=17.7551-20$$

$$\log 0.427=9.6304-10=29.6304-30$$

Una manera sencilla de encontrar N, si log N = 6.1239, consiste en buscar en la tabla IV el número x, de tres cifras, que corresponde a la mantisa 0.1239. Luego, x se multiplica por 10^6. Por lo tanto, dado que log 1.33 = 0.1239, tenemos:

$$N=1.33(10^6)=1.330{,}000$$

En la siguiente explicación puede usted descubrir por qué da resultado esta técnica.

$$\log N=6.1239=6+0.1239=6+\log 1.33=\log 10^6+\log 1.33=\log 10^6(1.33)=\log 1{,}330{,}000$$

Por consiguiente, log N = log 1,330,000, y sacamos la conclusión de que N = 1,330,000.

VERIFIQUE SU COMPRENSION

Encuentre el logaritmo común.

1. log 267	**2.** log 26.7	**3.** log 2.67
4. log 0.267	**5.** log 0.0267	**6.** log 42,000
7. log 0.000813	**8.** log 7990	**9.** log 0.00111

Encuentre N.

10. log N = 2.8248	**11.** log N = 0.8248
12. log N = 9.8248 – 10	**13.** log N = 0.8248 – 3
14. log N = 7.7126	**15.** log N = 18.9987 - 20

Nota: Mientras no se diga lo contrario, log N siempre significará $\log_{10}$ N.

EJEMPLO 2 Calcule P = (963)(0.00847) usando logaritmos (comunes).

Solución

$$\log P = \log(963)(0.00847) = \log 963 + \log 0.00847 \qquad (Ley\ 1)$$

Ahora, usamos la tabla IV.

$$\left.\begin{array}{r} \log 963 = 2.9836 \\ \underline{\log 0.00847 = 7.9279 - 10} \end{array}\right] \quad (Se\ suma)$$

$$\log P = 10.9115 - 10 = 0.9115$$

$$P = 8.16\left(10^{0}\right) = 8.16$$

Nota: La mantisa 0.9115 no aparece en la tabla IV. En este caso, usamos el valor más cercano; a saber: 0.9117, que corresponde a x = 8.16. Estas aproximaciones son suficientemente adecuadas para nuestros propósitos.

Para fácil referencia:

$$Ley\ 1. \quad \log MN = \log M + \log N$$

$$Ley\ 2. \quad \log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

$$Ley\ 3. \quad \log N^{k} = k \log N$$

Para un procedimientos más preciso, consulte el Ejercicio 39.
Por otra parte, el Ejercicio 38 ilustra la manera de encontrar log x cuando 0≤x<1 y x tiene más de tres cifras.

EJEMPLO 3 Use logaritmos para calcular el valor de $Q = \dfrac{0.00439}{0.705}$.

Solución Encontramos: log Q = log 0.00439 - log 0.705 (por la ley 2). Luego, consultamos la tabla.

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Esta forma se usa para evitar que aparezca una} \\ \textit{mantisa negativa cuando reste, en el siguiente paso} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \log 0.00439 = 7.6425 - 10 = 17.6425 - 20 \\ \underline{\log 0.705 \quad\ = 9.8482 - 10 = \ \ 9.8482 - 10} \end{array}\right] \quad (Se\ resta)$$

$$\log Q = 7.7943 - 10$$

$$Q = 6.23\left(10^{-3}\right)$$

$$= 0.00623$$

EJEMPLO 4 Use logaritmos para calcular el valor de $R=\sqrt[3]{0.0918}$.

Solución

$$\log R=\log(0.0918)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log 0.0918 \quad (\textit{Ley } 3)$$

$$=\frac{1}{3}(8.9628-10)=\frac{1}{3}(28.9628-30) \quad \begin{pmatrix}\textit{Evitamos la característica fraccionaria} \\ \textit{cambiando a } 28.9628-30\end{pmatrix}$$

$$=9.6543-10$$

$$R=4.51\left(10^{-1}\right)=0.451$$

EJEMPLO 5 Para determinar cuánto se debe cobrar por un galón de pintura, se necesita saber, en primer lugar, cuánto le cuesta al vendedor. La pintura está guardada en un tambor cilíndrico que mide 21 pies de diámetro y $3\frac{3}{4}$ pies de altura. Si se han pagado \$400 por esa cantidad de pintura, ¿cuánto cuesta cada galón? (Utilice usted esta equivalencia: 1 pie cúbico = 7.48 galones.)

$$\textit{Volumen de un cilindro}: \quad V=\pi r^2 h$$

Solución El volumen del tambor se obtiene multiplicando el área de la base por la altura. Así, tenemos:

$$\pi(1.25)^2(3.75)$$

pies cúbicos de pintura en el tambor. Entonces, el número de galones es:

$$\pi(1.25)^2(3.75)(7.48)$$

Como el costo total fue de \$400, el costo por cada galón está dado por:

$$C=\frac{400}{\pi(1.25)^2(3.75)(7.48)}$$

Empleamos π = 3.14 para efectuar el cómputo, usando logaritmos:

$$\log C=\log 400-(\log 3.14+2\log 1.25+\log 3.75+\log 7.48)$$

$$\begin{array}{rll}
 & \log 400 = 2.6021 & \\
\log 3.14 = 0.4969 & & \\
\log 1.25 = 0.0969 \rightarrow 2\log 1.25 = 0.1938 & (Se\ suma) & (Se\ resta) \\
\log 3.75 = 0.5740 & & \\
\underline{\log 7.48 = 0.8739} & & \\
2.1386 & \rightarrow \quad \underline{2.1386} & \\
 & \log C = 0.4635 & \\
 & C = 2.91\ x\ 10^{0} & \\
 & = 2.91 &
\end{array}$$

La pintura le costó al vendedor aproximadamente \$2.91 por galón.